L2 MTH1314 2016-2017

Correction du devoir maison n ° 3

Solution de l'exercice 1

Question 1. Comme on l'a déjà vu pour les entiers, on écrit l'algorithme d'Euclide que l'on remonte. Ici on effectue la division euclidienne pour les polynômes. On développe $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, puis l'on effectue la division euclidienne par X^2 :

$$X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = X^2(X-3) + 3X - 1.$$

Donc

$$3X - 1 = (X-1)^3 - X^2(X-3). \tag{1}$$

On continue en divisant X^2 par $3X-1$,

$$X^2 = (3X-1)\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{9} &= X^2 - (3X-1)\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{9}\right)\\ 1 &= 9X^2 - (3X-1)(3X+1).\end{aligned}$$

En injectant (1) dans cette égalité,

$$1 = 9X^2 - \Big[(X-1)^3 - X^2(X-3)\Big](3X+1).$$

Et l'on regroupe selon $(X-1)^3$ et X^2 :

$$\begin{aligned}1 &= X^2[9 + (X-3)(3X+1)] - (X-1)^3(3X+1)\\ &= X^2\Big(9 + 3X^2 - 9X + X - 3\Big) + (X-1)^3(-3X-1)\\ &= X^2\Big(3X^2 - 8X + 6\Big) + (X-1)^3(-3X-1).\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à ces calculs on observe que $U = 3X^2 - 8X + 6$ et $V = -3X - 1$ est une solution de l'équation $X^2U + (X-1)^3V = 1$.

Question 2. Puisque U est un polynôme de degré 2, par la formule de Taylor,

$$U(X) = U(1) + U'(1)(X-1) + \frac{U''(1)}{2!}(X-1)^2.$$

Or $U'(X) = 6X - 8$, $U''(X) = 6$, $U(1) = 3 - 8 + 6 = 1$, $U'(1) = 6 - 8 = -2$ et $U''(1) = 6$. D'où,

$$U(X) = 1 - 2(X-1) + 3(X-1)^2.$$

Question 3. D'après la question 1,

$$F = \frac{1}{X^2(X-1)^3} = \frac{X^2U + (X-1)^3V}{X^2(X-1)^3} = \frac{U}{(X-1)^3} + \frac{V}{(X-1)^3}.$$

D'après la question 2,

$$F = \frac{1 - 2(X-1) + 3(X-1)^2}{(X-1)^3} + \frac{-3X-1}{X^2} = \frac{1}{(X-1)^3} + \frac{-2}{(X-1)^2} + \frac{3}{X-1} + \frac{-3}{X} + + \frac{-1}{X^2},$$

ce qui correspond bien à la décomposition en éléments simples de F.

Solution de l'exercice 2

Question 1. Dans $\mathcal{S}_3$ on a l'identité, trois transpositions et deux trois cycles. Les transpositions ont une signature impaire (égale à -1) et les trois cycles et l'identité une signature paire (égale à 1). Donc

$$\mathcal{A}_3 = \{\text{id}, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}.$$

Dans $\mathcal{S}_4$ on a l'identité, six transpositions, huit 3-cycles, six 4-cycles et trois double-transpositions ($1+6+8+6+3 = 24 = \text{Card}\,(\mathcal{S}_4)$). L'identité, les 3-cycles, les double-transpositions sont de signature paire. Les transpositions et les 4-cycles sont de signature impaire. D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4 = \{&\text{id}, (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,2\,4), (1\,4\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,3), (2\,3\,4), (2\,4\,3),\\ &(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.\end{aligned}$$

Question 2. Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions de $\mathcal{S}_n$, avec $n \geqslant 3$. Nous distinguons trois possibles.

1. Les supports de τ_1 et de τ_2 ont deux éléments en commun. Alors $\tau_1 = \tau_2$ et donc $\tau_1 \circ \tau_2 = \text{id} = (1\,2\,3) \circ (1\,3\,2)$ et donc $\tau_1 \circ \tau_2$ peut s'écrire comme le produit de deux 3-cycles.

2. Les supports de τ_1 et de τ_2 ont exactement un élément en commun. Alors on peut écrire $\tau_1 = (a\,b)$ et $\tau_2 = (b\,c)$ avec a, b et c trois éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$. On remarque que $\tau_1 \circ \tau_2 = (a\,b) \circ (b\,c) = (a\,b\,c)$ et donc $\tau_1 \circ \tau_2$ peut s'écrire un 3-cycle.

3. Les supports de τ_1 et de τ_2 sont disjoints. Alors on peut écrire $\tau_1 = (a\,b)$ et $\tau_2 = (c\,d)$ avec a, b, c et d quatre éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$. On remarque que $\tau_1 \circ \tau_2 = (a\,b) \circ (c\,d) = (a\,d\,c) \circ (a\,b\,c)$ et donc $\tau_1 \circ \tau_2$ peut s'écrire comme un produit de deux 3-cycles.

Question 3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme un produit de 3-cycles :

$$\mathcal{E} = \{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \exists s_1, \ldots, s_k \text{ des 3-cycles},\ \sigma = s_1 \circ \cdots \circ s_k\}.$$

Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$. On sait d'après le cours que σ peut s'écrire comme le produit de transpositions. Il existe donc $\tau_1, \ldots \tau_k$ transpositions telles que $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$. Or $\sigma \in \mathcal{A}_n$ donc

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma) = 1 &= \varepsilon(\tau_1) \times \cdots \times \varepsilon(\tau_k) \qquad (\text{car } \varepsilon \text{ est un morphisme})\\ &= (-1)^k \qquad (\text{car les } \tau_i \text{ sont des transpositions}).\end{aligned}$$

Donc k est nécessairement pair, $k = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. On peut donc regrouper les transpositions deux à deux et par la question précédente on sait que le produit de deux transpositions appartient à $\mathcal{E}$. D'où :

$$\sigma = \underbrace{\tau_1 \circ \tau_2}_{\in \mathcal{E}} \circ \cdots \circ \underbrace{\tau_{2p-1} \circ \tau_{2p}}_{\in \mathcal{E}}.$$

Et donc $\sigma \in \mathcal{E}$, ceci étant vrai pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_n$, on en déduit que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{E}$ (et en fait puisque les 3-cycles sont dans $\mathcal{A}_n$ et que $\mathcal{A}_n$ est stable par composition, on a également $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_n$).

Question 4. Puisque $\mathcal{A}_n$ est un groupe, $\tau^{-1} \in \mathcal{A}_n$. On pose alors pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_n$, $\psi(\sigma) = \sigma \circ \tau^{-1}$ qui est bien une application de $\mathcal{A}_n$ dans $\mathcal{A}_n$. On remarque que

$$\forall \sigma \in \mathcal{A}_n, \qquad \varphi\left(\psi\left(\sigma\right)\right) = \varphi\left(\sigma \circ \tau^{-1}\right) = \sigma \circ \tau^{-1} \circ \tau = \sigma,$$

et

$$\forall \sigma \in \mathcal{A}_n, \qquad \psi\left(\varphi\left(\sigma\right)\right) = \psi\left(\sigma \circ \tau\right) = \sigma \circ \tau \circ \tau^{-1} = \sigma.$$

Donc φ est bijective sur $\mathcal{A}_n$, d'application réciproque ψ.

Question 5. Montrons que $\varphi(H) \subset \mathcal{A}_n \setminus H$. Soit $\sigma \in H$. Procédons par l'absurde et supposons que $\varphi(\sigma) \in H$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in H$ tel que $\varphi(\sigma) = \alpha$. Donc $\sigma \circ \tau = \alpha$. En composant de chaque côté par l'inverse de σ on en déduit que

$$\tau = \sigma^{-1} \circ \alpha.$$

Or H est un sous-groupe donc $\sigma^{-1} \in H$ et puisque l'on a également $\alpha \in H$, on en déduit que $\tau = \sigma^{-1} \circ \alpha \in H$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\tau \in \mathcal{A}_n \setminus H$. On en déduit donc que $\varphi(\sigma) \notin H$ et ceci pour tout $\sigma \in H$. D'où $\varphi(H) \subset \mathcal{A}_n \setminus H$.
Maintenant on va utilisé l'égalité des cardinaux des deux ensembles pour conclure. Puisque φ est bijective nécessairement $\mathrm{Card}\,(\varphi(H)) = \mathrm{Card}\,(H) = \frac{\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}_n)}{2}$. D'autre part, $\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}_n \setminus H) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{A}_n) - \mathrm{Card}\,(H) = \frac{\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}_n)}{2}$. Donc $\mathrm{Card}\,(\varphi(H)) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{A}_n \setminus H)$. Les deux ensembles ont le même cardinal et l'un des deux est inclus dans l'autre. On peut donc en déduire qu'ils sont égaux :

$$\varphi(H) = \mathcal{A}_n \setminus H.$$

Puisque φ est bijective, montrons que $\varphi(\mathcal{A}_n \setminus H) = \mathcal{A}_n \setminus \varphi(H)$. Par double inclusion. Soit $y \in \varphi(\mathcal{A}_n \setminus H)$, donc il existe $x \in \mathcal{A}_n \setminus H$ tel que $y = \varphi(x)$. Supposons que $y \in \varphi(H)$. Alors il existe $x' \in H$ tel que $y = \varphi(x')$ et donc $\varphi(x) = \varphi(x')$. Comme φ est injective on a $x = x'$. Or $x \in \mathcal{A}_n \setminus H$ et $x' \in H$, ceci est donc impossible. On en déduit donc que $y \notin \varphi(H)$ ceci étant vrai pour tout $y \in \varphi(\mathcal{A}_n \setminus H)$, on a bien $\varphi(\mathcal{A}_n \setminus H) \subset \mathcal{A}_n \setminus \varphi(H)$. Réciproquement soit $y \in \mathcal{A}_n \setminus \varphi(H)$. Puisque φ est surjective, il existe $x \in \mathcal{A}_n$ tel que $\varphi(x) = y$. Puisque l'on a toujours l'implication suivante $(z \in H \Rightarrow \varphi(z) \in \varphi(H))$, par contraposée, on a $(\varphi(x) \notin \varphi(H) \Rightarrow x \notin H)$ et donc $x \in \mathcal{A}_n \setminus H$ et finalement $y \in \varphi(\mathcal{A}_n \setminus H)$. Ceci nous permet de conclure la réciproque $\mathcal{A}_n \setminus \varphi(H) \subset \varphi(\mathcal{A}_n \setminus H)$. Puisque ici $\varphi(H) = \mathcal{A}_n \setminus H$, on en déduit que

$$\varphi(\mathcal{A}_n \setminus H) = \mathcal{A}_n \setminus (\mathcal{A}_n \setminus H) = H.$$

Question 6. Distinguons deux cas. Premier cas $\tau \in H$. Alors immédiatement, puisque H est un groupe, $\tau^2 \in H$. Second cas $\tau \in \mathcal{A}_n \setminus H$. Nous sommes dans la situation des questions 4 et 5. Or $\varphi(\mathcal{A}_n \setminus H) = H$ et $\tau \in \mathcal{A}_n \setminus H$ donc $\varphi(\tau) = \tau^2 \in H$. Dans tous les cas $\tau^2 \in H$.

Question 7. Soit σ un 3-cycle de $\mathcal{S}_n$. On observe que $\sigma^2 = \sigma^{-1}$. Or $\sigma \in \mathcal{A}_n$ donc par la question précédente, $\sigma^{-1} = \sigma^2 \in H$. L'ensemble H est un sous-groupe de $\mathcal{A}_n$ donc stable par passage à l'inverse, donc $\sigma \in H$ et tous les 3-cycles sont dans H. Par stabilité de H par composition on en déduit que $\mathcal{E} \subset H$. Donc d'après la question 3, $\mathcal{A}_n \subset H$ et donc $\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}_n) \leqslant Card(H) = \frac{\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}_n)}{2}$ et l'on obtient une contradiction. On a ainsi montré que le groupe $\mathcal{A}_n$ n'admet aucun sous-groupe d'indice 2 c'est-à-dire dont le cardinal est la moitié de celui de $\mathcal{A}_n$.

Solution de l'exercice 3

Question 1. On écrit

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(-x) &= \det\,(A - xJ) & \\
&= \det\,\left({}^t(A - xJ)\right) & \\
&= \det\,\left({}^tA - x{}^tJ\right) & \text{car la trace est linéaire,} \\
&= \det\,(-A - xJ) & A \text{ est antisymétrique et } J \text{ est symétrique,} \\
&= (-1)^{2n}\det\,(A + xJ) & \text{par multilinéarité du déterminant,} \\
&= \det\,(A + xJ) = F(x). &
\end{aligned}$$

Et donc la fonction F est une fonction paire sur $\mathbb{R}$.

Question 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les colonnes de la matrice $A + xJ$ sont $c_1 + xe$, $c_2 + xe$, $\dots$, $c_{2n} + xe$. Donc par linéarité du déterminant par rapport à sa première variable,

$$\begin{aligned} F(x) = \det\,(A + xJ) &= \det\,(c_1 + xe, c_2 + xe, \dots, c_{2n} + xe) \\ &= \det\,(c_1, c_2 + xe, \dots, c_{2n} + xe) + \det\,(xe, c_2 + xe, \dots, c_{2n} + xe) \end{aligned}$$

De même par linéarité du déterminant par rapport à le deuxième variable,

$$\begin{aligned} \det\,(c_1, c_2 + xe, \dots, c_{2n} + xe) = &\det\,(c_1, c_2, c_3 + xe, \dots, c_{2n} + xe) \\ &+ \det\,(c_1, xe, c_3 + xe \dots, c_{2n} + xe)\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} F(x) = \det\,(c_1, c_2, c_3 + xe, \dots, c_{2n} + xe) &+ \det\,(c_1, xe, c_3 + xe \dots, c_{2n} + xe) \\ &+ \det\,(xe, c_2 + xe, \dots, c_{2n} + xe) \end{aligned}$$

On réitère, en développant le premier coefficient par rapport à la première variable,

$$\begin{aligned} F(x) = \det\,(c_1, c_2, c_3, c_4 + xe, \dots, c_{2n} + xe) &+ \det\,(c_1, c_2, xe, c_4 + xe \dots, c_{2n} + xe) \\ &+ \det\,(c_1, xe, c_3 + xe \dots, c_{2n} + xe) \\ &+ \det\,(xe, c_2 + xe, \dots, c_{2n} + xe)\,. \end{aligned}$$

Donc par récurrence,

$$F(x) = \det\,(c_1, \dots, c_{2n}) + \sum_{i=1}^{n} \det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, xe, c_{i+1} + xe, \dots, c_{2n} + xe)\,. \tag{2}$$

On fixe $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Sur la matrice $(c_1, \dots, c_{i-1}, xe, c_{i+1} + xe, \dots, c_{2n} + xe)$ on effectue les opérations élémentaires consistant à mettre dans la colonne $p \geqslant i+1$, la colonne p moins la colonne i :

$$\forall i \in \{2, \dots, n\}, \qquad c_p + xe \leftarrow c_p + xe - xe.$$

Le déterminant est inchangé par ces opérations élémentaires donc, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, xe, c_{i+1} + xe, \dots, c_{2n} + xe) = \det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, xe, c_{i+1}, \dots, c_{2n})$$

et par la linéarité du déterminant par rapport à sa variable i,

$$\det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, xe, c_{i+1} + xe, \dots, c_{2n} + xe) = x\det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, e, c_{i+1}, \dots, c_{2n})\,.$$

En injectant ces égalités dans l'équation (2), on conclut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \det\,(A) + x\sum_{i=1}^{n} \det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, e, c_{i+1}, \dots, c_{2n})\,.$$

Question 3. Par la question 1, la fonction F est paire, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(-x)$. Donc par la question 2, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\det\,(A) + x\sum_{i=1}^{n} \det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, e, c_{i+1}, \dots, c_{2n}) = \det\,(A) - x\sum_{i=1}^{n} \det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, e, c_{i+1}, \dots, c_{2n})\,.$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x\sum_{i=1}^{n} \det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, e, c_{i+1}, \dots, c_{2n}) = 0,$$

l'égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on conclut que $\sum_{i=1}^{n} \det\,(c_1, \dots, c_{i-1}, e, c_{i+1}, \dots, c_{2n}) = 0$ et que donc,

$$F(x) = \det\,(A).$$

On pouvait aussi dire que comme F est affine et paire elle est constante (c'est ce que l'on redémontre ici) et vaut sa valeur en 0.